

# 荷重積分法：オプティカルフロー検出から周波数推定へ

安藤 繁\*

\* 東京大学大学院 情報理工学系研究科 東京都文京区本郷 7-3-1  
\* Hongo 7-3-1, Bunkyo-ku, Tokyo, Japan  
\* E-mail: ando@alab.t.u-tokyo.ac.jp

キーワード：逆問題 (inverse problem), 間接計測 (indirect sensing measurement), 荷重積分法 (weighted integral method), オプティカルフロー (optical flow), 周波数推定 (frequency estimation), 時間相関イメージセンサ (correlation image sensor), 音源定位 (sound source localization).  
JL 0009/12/5109-0828 © 2012 SICE

## 1. はじめに

逆問題とは、間接的に得られる多数の測定結果から、直接には測れない対象の情報を得ることに関わる数学問題を指す<sup>1)</sup>。逆問題を計算機で解いて測定結果を得るセンシング手法を間接計測と呼ぶ<sup>2)</sup>。磁気共鳴映像 MRI, 脳磁計 MEG, 脳電計 EEG, ポジトロン CT のような医用画像診断技術, 合成開口レーダ, 地下資源探査, 超解像, 波源定位, 速度場の再構成など, 現代では幅広い展開がなされている。これらの方法論の本質は、現象を数理的に捉え、その構造に立脚してアルゴリズムを構築してゆくこと、計測技術者の立場では、そのような構造をもつようにセンシングシステムを考え設計してゆくことである。

物理現象のモデル化は、ほとんどが微分または偏微分方程式で与えられる。逆解法を計算機に適した方法とするには、偏微分方程式のモデルから代数的関係式を、なるべく近似を含まない形で得ることが必要だが、これまでは無限の観測領域など、理想化された状況でしかそのような方法は見いだされていなかった。近年、このための、非常に一般的と思われる方法論がまったく別な方向からの研究の中で発見された。本稿では、この発見の経緯からそれが信号処理における古典的問題に結びつくまでを議論の縦軸として、この方法論の基本的な考え方と適用法について解説する。

## 2. 逆問題の方法論と新たな問題意識

### 2.1 映像型アプローチと直接型アプローチ

逆問題解法は大きくは映像型アプローチと直接型アプローチに分けられる。映像型では対象をメッシュ上の値の分布として捉える。すなわち、対象空間上と観測空間上に固定のメッシュを切り、メッシュ上の物理量と観測量の間の関係を式で表わす。これを数値的に解くことで値の分布を得る。メッシュを十分細かく取ることで、その分布を駆動するソースの位置や構造の推定が可能になる。ただ、これは観察手段の高度化とは言っても、計測の最終目的には到達していない。ソースの推定は後続の解析の役割である。

一方、直接型アプローチでは、ソースや場のパラメータを直接的に解こうとする。最も理想的なのは、これらを陽に表現する数式を得ることである。観測値を代入するだけで簡単かつ高精度に所望の結果を得る。容易ではないが、

新しい観測手段や数学的方法論が徐々にこれを可能にする。発展への知的チャレンジであり、問題や物理的な場の深い理解につながる逆問題の本質がある。このアプローチをより広い应用到に拡大することはできないだろうか。

### 2.2 状態量の推定と支配方程式のパラメータ推定

方法論の違いには、測定したい物理量の役割の違いが本質的である。たとえば振動するバネ質量ダンパ系を考える。位置や速度や加速度は、運動方程式という微分方程式の変数の値 (状態量) である。一方、質量やバネ定数や粘性定数はこの微分方程式の係数である。位置や速度や加速度には直接的測定手段がある。しかし、質量やバネ定数や粘性定数の測定は微分方程式の係数推定に等しく、間接的である。状態量はこれらの情報を運ぶ媒体と捉えられる。

このように、支配方程式のパラメータ推定に帰着する計測対象は数多い。この問題に、組織的で有効な方法論を与えることはできないだろうか。

### 2.3 観測方法とその時空間的広がり

観測プロセスの最も一般的な表現が荷重積分である。物理量の分布に時間的・空間的な重み (荷重関数) を乗じて積分する。標本化や応答特性もこのような重み付けの一つであり、CT における投影もこのような荷重積分の一つである。これらを適切に設計したり新たな形式を導入することで、計測に一段と高い能力を付与できないだろうか。

一方、実際の観測では観測の広がりには有限とならざるをえない。影響が続いているのに観測が打ち切られると、結果に顕著なアーチファクトが発生し、大きな誤差要因となる。しかるに、従来の理論はほとんど無限の広がり前提にしたものである。観測範囲の有限さを正しく取り込んでかつ厳密な理論は作れないのであろうか。

## 3. オプティカルフロー検出

このような問題意識から取り組んだものの一つが時間相関イメージセンサ<sup>3), 4)</sup> である。通常の画像は 1 フレーム内の到来光量を重み 1 で積分したものである。これを任意の荷重関数で積分できるように拡張した。このデバイスの応用を考える中で、荷重積分法を発見するに至った。

### 3.1 オプティカルフロー

オプティカルフローとは、3次元中の運動物体が2次元平面に結像して生じる明暗の動きである<sup>5), 6)</sup>。これを検出

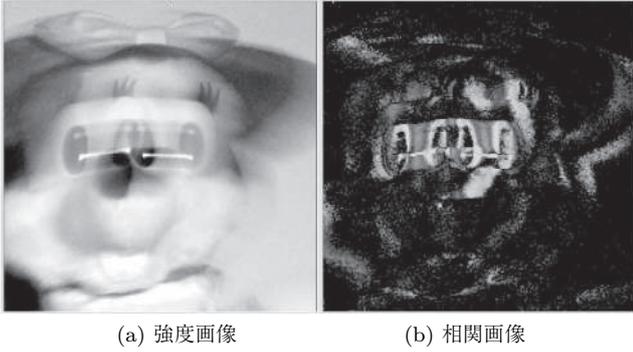


図1 複素正弦波変調撮像の例

強度画像が運動によってぼける部分に、相関画像は特有の振幅位相分布を生成する（色相は複素数の位相，明るさは振幅で表示）。カラー図は学会 HP を参照（以下の図も同じ）。

する代表的な方法論は3種類あるが、どれも欠点をかかえている。局所領域のフレーム間対応付けによる方法は、計算量が膨大だがパターンの伸縮回転等の変化に弱く速度場の解像度が低い。動画像の時空間スペクトル構造を利用する方法は有限な観測時間と観測領域で厳密性を失い、精度と解像度が低下する。残りの一つは以下の議論の主題のオプティカルフロー偏微分方程式を用いる方法である。この方程式は本来は厳密で、変動する場の局所解析に好適だが、これに基づく従来法は数値微分を用いていたため、多大な差分近似誤差が入り、フレーム間での移動量が大きいと意味ある結果を得るのはほとんど困難であった。

### 3.2 複素正弦波変調撮像

時間相関イメージセンサがこの状況を一変させることは容易に想像できた。通常の画像（強度画像）は運動によってぼけを生じ情報を失う。運動による明暗の時間変化が重み1の撮像で平均化され減じてしまうためである。一方で、時間変化する形態に移った情報は、その周波数帯域に合った複素正弦波の荷重関数で直交復調すれば取り出すことができる。このような考えで発案したのが複素正弦波変調撮像<sup>7)</sup>（位相スタンプ撮像）であった。図1(a),(b)に撮像例を示すように、確かに通常の画像に比べて格段に豊富な情報が得られている。強度画像が運動ぼけで細部構造を失う部分に複素正弦波変調撮像の画像（相関画像）は特有な応答を示し、両画像で相補的な情報表現をなすことも予想の通りである。喜び勇んで、速度場を求める具体的解法に研究を進めた。

### 3.3 オプティカルフロー偏微分方程式

対象上の各点は運動中一定の明るさを保つことを固定した座標系の微分量の関係で表現したものを、すなわち

$$\left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} \right) f(x, y, t) = 0 \quad (1)$$

をオプティカルフロー偏微分方程式という<sup>5)</sup>。流体力学では移流方程式と呼ばれる。速度ベクトル  $(v_x, v_y)$  は滑らかなら空間の関数でも時間の関数であってもよく、一般解は

このような速度場に沿って流れる明暗パターンとなる<sup>8)</sup>。

筆者らは、新たな方法を考えるにあたり、この方程式を出発点と決めた。これを新たな撮像法の荷重積分量の関係に落とせばよいのである。それには偏微分方程式自体を荷重積分するのが手取り早い。すなわち、1フレーム時間  $[-T/2, T/2]$  においてオプティカルフロー偏微分方程式が一樣に成り立てば、それを1フレーム時間で任意の荷重関数  $w(t)$  を乗じて積分しても零、その逆も成り立つから、

$$\begin{aligned} \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} \right) f(x, y, t) &= 0 \quad \forall t \in \left[ -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right] \\ \Leftrightarrow \int_{-T/2}^{T/2} w(t) \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} \right) f(x, y, t) dt \\ &= 0 \quad \forall w(t) \end{aligned} \quad (2)$$

の同値関係が成り立つ。部分積分を行うと、

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t} \right) f(x, y, t) \right\} w(t) dt \\ = \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \int_{-T/2}^{T/2} f(x, y, t) w(t) dt \\ + [f(x, y, t) w(t)]_{-T/2}^{T/2} - \int_{-T/2}^{T/2} f(x, y, t) \frac{\partial}{\partial t} w(t) dt \end{aligned}$$

のように  $f(x, y, t)$  の微分が荷重関数の微分に移るとともに、両関数の積の積分境界値の差（積分境界値項）が新たな項として現れる。ここまでは当然の変形だが、複素正弦波変調撮像に合わせて、荷重関数を

$$w_n(t) = e^{-jn\Delta\omega t}, \quad \Delta\omega \equiv \frac{2\pi}{T} \quad (3)$$

と置いてこの式を眺めたときに驚きの展開が待っていた ( $n$  は1フレームに入れる正弦波の周期の数で整数。整数に選ぶだけで完備)。まず第1に、複素正弦波の微分は

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(x, y, t) \frac{\partial}{\partial t} e^{-jn\Delta\omega t} dt \\ = -jn\Delta\omega \int_{-T/2}^{T/2} f(x, y, t) e^{-jn\Delta\omega t} dt \end{aligned} \quad (4)$$

のように複素正弦波となって関数形が変わらない。これは、問題を解くのに必要な荷重積分量の種類が増えないということで、大変好都合である。だが、新たに現れた積分境界値項はどう見ても邪魔者である。最初は、よく行われるように窓関数を乗じて逃げる手（(4)式の関係が失われ近似が導入される）しかないと思っていたが、黒板の前に院生と議論している中ではっと気が付き、「その項、消えるね」とつぶやいた一瞬は忘れようもない。なぜなら、荷重関数はフレームと周期が一致するように選ばれるのだから、

$$[f(x, y, t) e^{-jn\Delta\omega t}]_{-T/2}^{T/2}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-jn\Delta\omega T/2} f\left(x, y, \frac{T}{2}\right) - e^{jn\Delta\omega T/2} f\left(x, y, -\frac{T}{2}\right) \\
&= (-1)^n f\left(x, y, \frac{T}{2}\right) - (-1)^n f\left(x, y, -\frac{T}{2}\right) \\
&= (-1)^n [f(x, y, t)]_{-T/2}^{T/2} \quad (5)
\end{aligned}$$

のように、符合以外は  $n$  によらない値になる。未知数のままで残してもたった1個である。この第2の展開のおかげで、荷重積分の関係式は

$$\begin{aligned}
\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}\right) g_n(x, y) + (-1)^n [f(x, y, t)]_{-T/2}^{T/2} \\
+ jn\Delta\omega g_n(x, y) = 0 \quad \forall n \quad (6)
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$g_n(x, y) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x, y, t) e^{-jn\Delta\omega t} dt \quad (7)$$

は  $n = 0$  の強度画像と  $n > 0$  の相関画像を統一的に表わしている。未知数は1画素あたり  $v_x, v_y, [f(x, y, t)]_{-T/2}^{T/2}$  の実数3個なので、強度画像（実数）と1枚の相関画像（複素数）を連立し、

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} g_n(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} g_n(x, y) & (-1)^n \\ \frac{\partial}{\partial x} g_0(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} g_0(x, y) & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ [f(x, y, t)]_{-T/2}^{T/2} \end{bmatrix} = -j \begin{bmatrix} n\Delta\omega g_n(x, y) \\ 0 \end{bmatrix}$$

とすることで解ける。空間方向の偏微分は周波数領域のフィルタ処理でほぼ理想的に求められるので、ここではそのまま残している。第3列を掃き出した表現では

$$\begin{aligned}
\left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}\right) (g_n(x, y) - (-1)^n g_0(x, y)) \\
+ jn\Delta\omega g_n(x, y) = 0 \quad (8)
\end{aligned}$$

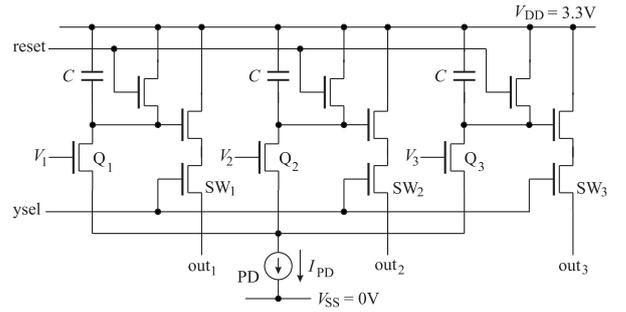
である<sup>8), 9)</sup>。この式は、簡便解法とともに荷重積分法に興味ある解釈を提供する（後述）。

### 3.4 時間相関イメージセンサ<sup>3), 4), 10), 11)</sup>

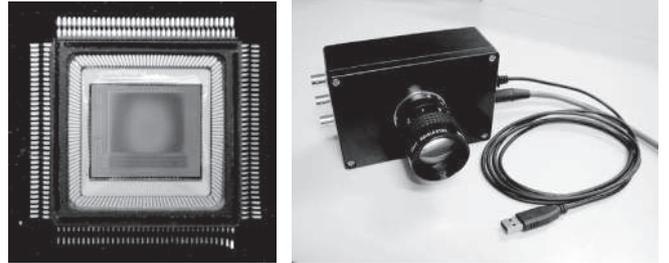
図2に画素回路とチップ写真を示す<sup>12)</sup>。時間相関イメージセンサでは、画素ごとに光電荷の蓄積コンデンサが3個あり、それらに光キャリアをアナログ的に分流して蓄える。複素正弦波変調撮像では参照信号を三相の正弦波とする。1フレーム内で蓄積された電荷を  $Q_1, Q_2, Q_3$  とすると、読み出し後に以下の行列を乗じて、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(n\Delta\omega t) \\ -\sin(n\Delta\omega t) \end{bmatrix} dt \equiv \begin{bmatrix} g_0 \\ \Re g_n \\ \Im g_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

のように周波数0と  $n\Delta\omega$  の有限フーリエ変換を取得する。



(a) 画素回路（PD、電荷-電圧変換、垂直選択、リセット回路）



(b) 640 × 512 画素チップ<sup>12)</sup> (c) 時間相関カメラ (USB 接続)

図2 CMOS 能動読み出し型三相時間相関イメージセンサの画素回路と 640 × 512 画素チップおよびカメラ

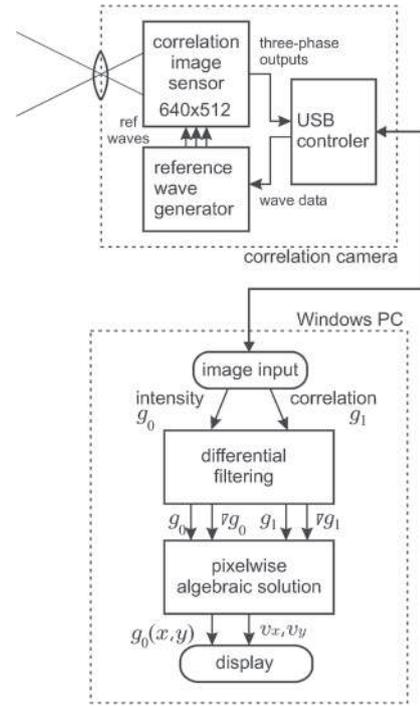


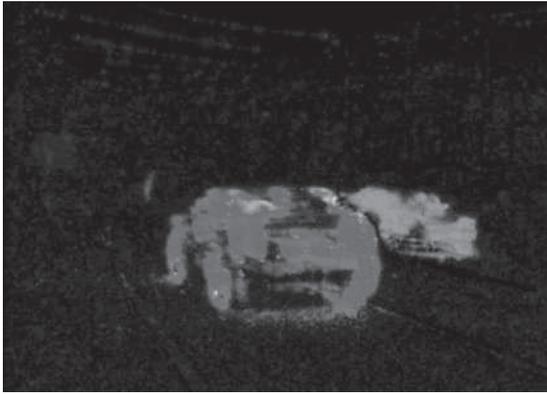
図3 時間相関イメージセンサと PC 内の計算部を含む処理のブロック図。強度画像に重ねて速度分布が表示される。

### 3.5 システム構成と検出例

図3にシステム構成を示す<sup>13)</sup>。通常の応用では最低次の周波数成分に変化の情報の大半が含まれるため、参照信号周波数は  $n = 1$  に選ぶ。フレーム周期と参照信号には位相原点を含む完全な同期が必要なため、必要な波形はカメラ自身で発生させている。



(a) 強度画像



(b) 速度ベクトル画像 (色相 = 方向, 明度 = 速さ)

図4 交差点を往来する車両の検出例

検出されたオプティカルフローを、方向を色相で、速さを明るさで表わしたもの。左上に右折車両や接近車両も捉えられている。

図4に検出例を示す。全画素で計算され、速度ベクトル画像として捉えられている。色相は赤が左方向、青が右方向の速度場を表わし、明るいほど高速である。左方に向かう車両の影が道路に写った部分や、すれ違った車両のバンパーやフロントガラスの部分に異常応答が見られる。運動場と静止場との混合、対向車や周囲の風景の反射像が原因である。このような検出結果は、速度検出の欠陥というよりは、高解像度オプティカルフロー検出によって得られる新たな情報であり、上位の認識系によって有効に生かす。

### 3.6 荷重関数から合成される「窓関数」

図5は、(8)式の各項を生成する荷重関数のグラフである。後に空間微分される荷重積分量  $g_1(x, y) - (-1)^1 g_0(x, y) = g_1(x, y) + g_0(x, y)$  を生成する荷重関数は、実部が青線、虚部が緑線表示されている。これは、 $g_1(x, y)$  の実部の荷重関数 (赤線) と  $g_0(x, y)$  の荷重関数 (黒線、フレーム内で常に1) の和であり、両端で零の「窓関数」の形に合成されている。このため微分が境界で発散せず、全域で  $g_1(x, y)$  との厳密な比例関係が保たれている。すなわち、荷重積分法の1つの解釈として、荷重関数の適切な組み合わせにより、「窓関数」と同様な効果を含む荷重積分量の関係を導き、

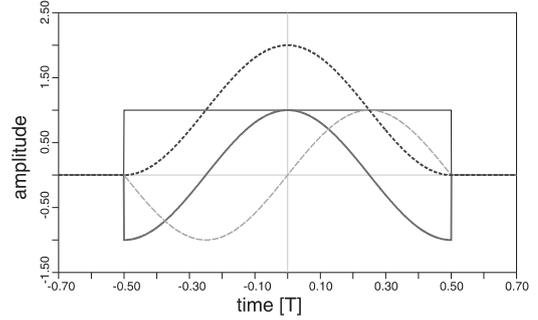


図5 オプティカルフロー恒等式の各項を生成する荷重関数  
黒 (細線): 強度画像  $g_0$ , 赤 (太線) と緑 (破線): 相関画像  $g_1$  の実部と虚部, 青 (点線):  $g_1 + g_1$  の実部。

解法に利用していると見なせる。

## 4. 周波数推定

偶然が重なって見つかった荷重積分法であるが、一般化して述べれば、1) 対象を微分方程式の係数推定問題として捉え、2) 適切な荷重関数により荷重積分量と積分境界値による代数方程式に帰着させ、3) これを直接に解く、という方法論とすることができる。筆者は、これを未解決な重要問題に適用することで、その価値を広く認知させたいと考えた。そこで取り組んだのが周波数推定問題である。

### 4.1 フーリエ分析と Prony 法

正弦波のパラメータ (周波数, 振幅, 位相) を雑音下で推定する問題には通信や計測を含む幅広い応用があり、数多くの方法が研究開発されてきた<sup>14), 15)</sup>。しかし、いずれもが問題を抱えているのはオプティカルフローの状況によく似ている。しかし、その歴史ははるかに長い。

そもそも、周波数推定は18世紀のフランスの数学者 Fourier と Prony によって対照的な形で始まった。Fourier はあらゆる波形が正弦波の和に展開できることを示し、これをフーリエ級数展開やフーリエ変換として定式化した。一方、Prony は正弦波の等間隔標本値が満たす線形関係 (差分方程式) に着目し、この差分方程式の係数を波形から推定し、差分方程式の基本解として周波数を決定した。

有限区間でのフーリエ変換は、基底周波数が離散的にしかならないため、分解により得られる分布 (スペクトル) も離散的なものとなる。このメッシュは対象正弦波とは無関係に決まり固定である。要するに、フーリエ変換は周波数推定に関する映像型アプローチをなしている。単一周波数正弦波でもエッジ効果でそのエネルギーは離散スペクトル全体に散らばるため、周波数の推定には適切な窓関数と、分布の中心を求める手段が必要となる。しかし、これらは作為的な誤差や近似式の導入にほかならない。

これに対して Prony 法は直接型アプローチをなし、AR (Auto-regressive, 自己回帰) モデルとそれに基づく信号解析手法の基となり、フーリエ変換がそうであったように、現

代の信号処理の根幹として発展した。しかし、これを周波数推定に適用すると、統計的有効性の理想値（Cramer-Rao の下限、CRLB）から遠い値しか実現できず、データ量を増やすほど、その差は大きくなった<sup>16)</sup>。一方でフーリエ分析は、推定誤差に観測雑音が支配的な領域で CRLB に漸近する性能が得られる。これは、フーリエ分析の本質、有効情報をピーク付近に集約し SN 比を高めることの効果である。自己相関関数を観測値とする Prony 流の方法<sup>17), 18)</sup>には、このような性質は含まれない。これら 2 つの方法論を統合する形で、フーリエ変換を内在し、かつ近似に無縁な方法の実現に荷重積分法は貢献できないであろうか。

#### 4.2 荷重積分法の適用<sup>19), 20)</sup>

目標と問題意識が定まったので、さっそく荷重積分法の手順に従い導出を始めることとした。

##### (1) 微分方程式の係数推定問題としての定式化

線形で定係数の 2 階微分方程式

$$\ddot{f}(t) + a^2 f(t) = 0, \quad (10)$$

は、一般解  $f(t) = A \cos(at + \phi)$  を有する（ $\cdot$  は時間微分を示す）。振幅  $A$  と位相  $\phi$  は微分方程式の係数には含まれず積分の過程で現れる任意実数で、解の自由度を表現する。一方、周波数  $a$  は係数に含まれ、解を当該周波数の正弦波に拘束する。この意味で、(10) 式は周波数推定問題に必要な波形の拘束式、正弦波拘束微分方程式となる。

##### (2) 正弦波拘束微分方程式の荷重積分

信号はただ 1 つの正弦波を含み、観測区間  $[0, T]$  内で一定な周波数と振幅と位相をもつと仮定する。そうすると、正弦波拘束微分方程式はこの区間内で一様に成立し、任意の荷重関数  $w(t)$  に関する同値関係

$$\begin{aligned} \ddot{f}(t) + a^2 f(t) &= 0 \quad \forall t \in [0, T] \\ \Leftrightarrow \int_0^T (\ddot{f}(t) + a^2 f(t))w(t)dt &= 0 \quad \forall w(t) \end{aligned} \quad (11)$$

が成立する。2 階微分の積分に部分積分を 2 度適用すると、

$$\begin{aligned} \int_0^T \ddot{f}(t)w(t)dt \\ = [f(t)w(t)]_0^T - [f(t)\dot{w}(t)]_0^T + \int_0^T f(t)\ddot{w}(t)dt \end{aligned}$$

となる。ここで、オプティカルフローの場合とまったく同様に複素正弦関数  $e^{-jn\Delta\omega t}$  ( $\Delta\omega = 2\pi/T$ ) を荷重関数として導入する。すると、荷重関数の微分は同じ複素正弦関数となり、必要な荷重積分量は窓関数なしの有限フーリエ積分

$$g_n \equiv \int_0^T f(t)e^{-jn\Delta\omega t} dt \quad (12)$$

のみとなる。一方、新たに 2 つ生じた積分境界値項は

$$\begin{aligned} [f(t)e^{-jn\Delta\omega t}]_0^T &= [f(t)]_0^T \\ [\dot{f}(t)e^{-jn\Delta\omega t}]_0^T &= [\dot{f}(t)]_0^T \end{aligned}$$

のように、いずれも  $n$  によらず同一となる。これらを代入すると、正弦波拘束微分方程式の積分形式は

$$\begin{aligned} \int_0^T (\ddot{f}(t) + a^2 f(t))e^{-jn\Delta\omega t} dt \\ = [\dot{f}(t)]_0^T + jn\Delta\omega [f(t)]_0^T - n^2 \Delta\omega^2 g_n + a^2 g_n \\ = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

と書かれる。この式は複素の代数方程式であり、1 個の未知数  $a^2$  と既知量  $n, \Delta\omega$  ならびに観測量  $g_n$  を含む。積分境界値項  $[f(t)]_0^T, [\dot{f}(t)]_0^T$  は、波形データからの観測量としても未知量としても扱うことができる。 $n$  は必要なだけ用意できるのだから、いずれにせよ、これが容易に解ける連立方程式を与えることは明かである。

##### (3) 解法

種々の解き方があるが、ここでは積分境界値を未知数とし、複素解の実部を用いる 3 周波数連立法 (3F-C 法) を述べる。周波数を  $n_1, n_2, n_3$  とすると、連立方程式は

$$\begin{bmatrix} g_{n_1} & 1 & jn_1\Delta\omega \\ g_{n_2} & 1 & jn_2\Delta\omega \\ g_{n_3} & 1 & jn_3\Delta\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2 \\ [\dot{f}(t)]_0^T \\ [f(t)]_0^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1^2 \Delta\omega^2 g_{n_1} \\ n_2^2 \Delta\omega^2 g_{n_2} \\ n_3^2 \Delta\omega^2 g_{n_3} \end{bmatrix}$$

となる。この複素のままの解は

$$a^2 = \frac{j\Delta\omega^3}{\det A} \{ (n_3 - n_2)n_1^2 g_{n_1} + (n_1 - n_3)n_2^2 g_{n_2} + (n_2 - n_1)n_3^2 g_{n_3} \} \quad (14)$$

$$\det A = j\Delta\omega \{ (n_3 - n_2)g_{n_1} + (n_1 - n_3)g_{n_2} + (n_2 - n_1)g_{n_3} \} \quad (15)$$

で与えられる。 $a^2$  の実部の平方根が周波数推定値である。

#### 4.3 「窓関数」に基づく導出<sup>20)</sup>

荷重積分法の一般化した手順で確かに推定式に到達した。では、もう 1 つの解釈から始めたらどうなるだろうか。

積分境界値項を消すには、両境界で値も微分も零となる窓関数  $p(t)$  を導入し、 $w(t) = p(t)e^{-jn\Delta\omega t}$  とすればよい。 $p(0) = \dot{p}(0) = p(T) = \dot{p}(T) = 0$  ゆえ、荷重積分は

$$\begin{aligned} \int_0^T (\ddot{f}(t) + a^2 f(t))p(t)e^{-jn\Delta\omega t} dt \\ = \int_0^T f(t)\ddot{p}(t)e^{-jn\Delta\omega t} dt \\ - 2jn\Delta\omega \int_0^T f(t)\dot{p}(t)e^{-jn\Delta\omega t} dt \\ - (n^2 \Delta\omega^2 - a^2) \int_0^T f(t)p(t)e^{-jn\Delta\omega t} dt \\ = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

と書かれる。ここでの関心は、 $p(t)$  がごく少数の荷重関数の合成である場合にある。Hann の窓関数

$$p(t) \equiv 1 + \cos\left(\Delta\omega\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) \\ = -\frac{1}{2}e^{-j\Delta\omega t} + 1 - \frac{1}{2}e^{j\Delta\omega t}$$

が条件を満たすが、上式の各項が荷重関数  $e^{-jn\Delta\omega t}$  の周波数をシフトさせるだけのため、(16) 式中の荷重積分は、

$$\tilde{g}_n \equiv \int_0^T f(t)p(t)e^{-jn\Delta\omega t} dt = -\frac{1}{2}g_{n-1} + g_n - \frac{1}{2}g_{n+1} \\ \tilde{h}_n \equiv \int_0^T f(t)\dot{p}(t)e^{-jn\Delta\omega t} dt = \frac{j\Delta\omega}{2}(g_{n-1} - g_{n+1}) \\ \tilde{k}_n \equiv \int_0^T f(t)\ddot{p}(t)e^{-jn\Delta\omega t} dt = \frac{\Delta\omega^2}{2}(g_{n-1} + g_{n+1})$$

のように、窓関数を用いない荷重積分  $g_{n-1}, g_n, g_{n+1}$  の合成で書かれてしまう。これを用いると (16) 式は

$$a^2 = n^2 \Delta\omega^2 - \frac{\tilde{k}_n - 2jn\Delta\omega\tilde{h}_n}{\tilde{g}_n} \quad (17)$$

のように簡単に解かれることになる (3W-3 法)。

実は (17) 式は (14) 式で  $(n_1, n_2, n_3) = (n-1, n, n+1)$  の場合に等しいことがわかる<sup>20)</sup>。荷重積分法が荷重関数の組み合わせにより「窓関数」と同様な効果を得るとの解釈は、ここでも正しいことが確かめられた。

#### 4.4 推定能力の比較評価

上述のように、厳密な周波数推定法がすっきりとした形で導かれた。フーリエ変換を内在し、ピーク近傍のスペクトル値で推定が行われる。果たして統計的有効性は目論み通り CRLB に漸近できるのだろうか。

図 6 は推定誤差分散を他の方法と比較した結果を示す<sup>20)</sup>。このグラフは推定法の性能を的確に表現する。横軸が観測雑音の分散で、左に行くほどデータの SN 比が高い。縦軸が推定誤差の分散で、下に行くほど精度が高い。線のパラメータはデータ長  $N$  と推定方式で、細い黒線が推定誤差分散の理想値の CRLB である。左側でグラフが水平になるのは、その推定方式は高 SN 比で近似による系統誤差が支配的なことを示す。全体に CRLB から離れるのは、その方式はデータの含む情報を使い切っていないか、低 SN 比の成分に依存するなど、不適切に利用していることを示す。

比較対象の QIFFT 法<sup>21)</sup>、Quinn の方法<sup>22)</sup>、Macleod<sup>23)</sup> の方法とも、FFT のピーク近辺での補間により周波数を定める方法である。グラフから、QIFFT 法は有効性が若干低く、系統誤差の顕在化が早いことから、推定式の近似精度が良くないことが読み取れる。Quinn の方法と Macleod の方法は統計的有効性が高く、推定式の近似精度も改善されている。これらに対して、荷重積分法による 3F-C 法と 3F-R 法 (解を実数値に拘束した 3F-C 法) は、CRLB への

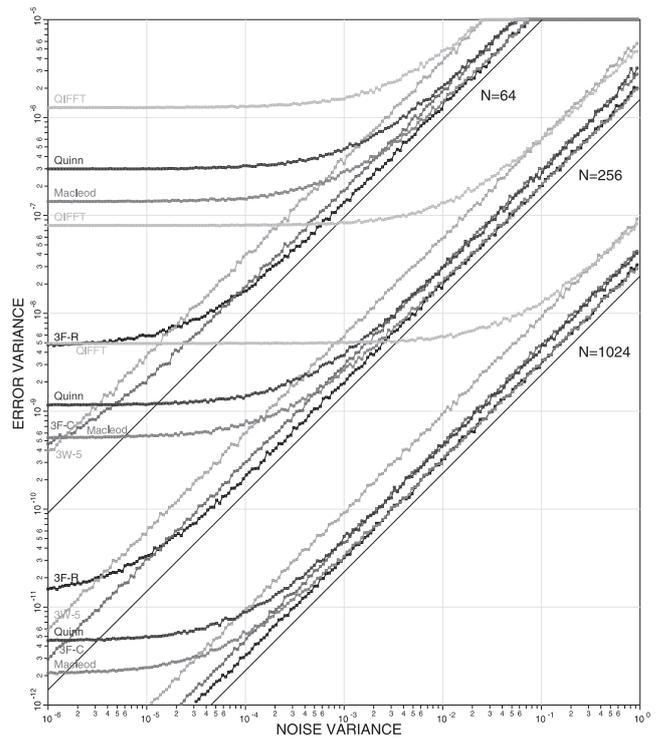


図 6 荷重積分法と他の FFT に基づく方法との比較<sup>20)</sup>  
観測雑音分散と推定誤差分散の関係を、推定方式とデータ長ごとにプロットしている。

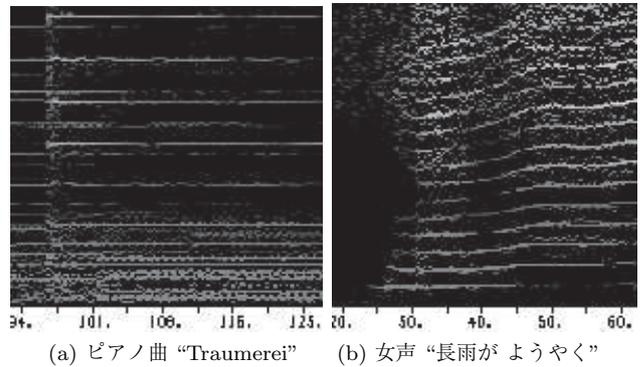


図 7 実音響信号への適用例 ( $f_S = 44.1$  kHz)  
FFT のすべての周波数成分の組から推定した周波数を投票してできた分布を示す。(a) ピアノの低音部と高音部の倍音構造 ( $N = 512$ )。 (b) 有声音のピッチ構造 ( $N = 256$ )。

漸近も他の方法同様に高く、観測誤差が小さくなるだけ一様に推定誤差も小さくなる。近似を含まないのだから、この性質は当然と言える。3W-5 法は、合成に用いる荷重関数を 5 個に増やし、周波数選択力を強化した方法である。推定の有効性が若干犠牲になるが、複数の正弦波が混在する状況で妨害を少なく推定可能な利点をもつ<sup>20)</sup>。

#### 4.5 実音響信号への応用

図 7 に実音への適用結果の一例を示す。FFT で計算した周波数成分のすべての隣接する 3 個の組で周波数が推定され、それを周波数軸上に投票してヒストグラムを形成する。

これが周波数に対応した色相と投票数に対応した明度のカラーマップで示されている。(a)はピアノ演奏への結果で、ほとんどすべての倍音系列が明瞭に分離され、ばらつきの少ない細線の軌跡を形成している。(b)は日本語の女声に対する結果で、有声音の区間においてピッチ構造とその変化が高い解像度で検出されている。

## 5. おわりに

荷重積分法は、ここで説明した以外にも、ヤドリバエ模倣型音源定位センサ<sup>24)</sup>、瞬時波源定位<sup>25)</sup>、波形中心検出<sup>26)</sup>、複素場の極定位<sup>27)</sup>、モアレドップラ周波数推定<sup>28)</sup>などに適用され、成果を上げている。多くの方々がこの方法論を活用し、さらに発展してゆくことを期待する。

(2012年6月14日受付)

### 参考文献

- 1) たとえば, A. Tarantola: *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*, SIAM Publishing (2005)
- 2) たとえば, 安藤 繁: 合成開口レーダと間接計測技術, 計測と制御, **22-2**, 209/218 (1983)
- 3) 来海 暁, 安藤 繁: 時間相関イメージセンサ — 高度な実時間パターン計測を実現する画像センサ —, 計測と制御, **47-1**, 10/17 (2008)
- 4) 安藤 繁, 来海 暁: 時間相関イメージングとその応用, 電気学会 E 部門誌, **129-5**, 129/137 (2009)
- 5) B.K.P. Horn and B.G. Schunck: Determining optical flow, *Artificial Intelligence*, **17**, 185/203 (1981)
- 6) J.L. Barron, D.J. Fleet and S.S. Beauchemin: Performance of optical flow, *Int. J. Computer Vision*, **12-1**, 43/77 (1994)
- 7) S. Ando, D. Wei, P. Masurel and T. Kurihara: Complex-sinusoidally modulated imaging for optical flow detection, *SIAM Conference on Imaging Science*, Minneapolis (2006)
- 8) 安藤 繁, 魏 大比, P. Masurel: 複素正弦波変調撮像によるオプティカルフロー検出理論および時間相関イメージセンサによる実現, 情報処理学会 CVIM 論文誌, **49-6**, 13/21 (2008)
- 9) 魏 大比, P. Masurel, 栗原 徹, 安藤 繁: 複素正弦波変調撮像に基づくオプティカルフロー推定, 電子情報通信学会論文誌, **J90-D-8**, 2009/2018 (2007)
- 10) S. Ando and A. Kimachi: Correlation image sensor: Two-dimensional matched detection of amplitude modulated light, *IEEE Trans. Electron Devices*, **50-10**, 2059/2066 (2003)
- 11) S. Ando, T. Nara, N. Ono and T. Kurihara: Real-time orientation-sensitive magneto-optic imager for leakage flux inspection, *IEEE Trans. Magnetics*, **43-3**, 1044/1051 (2007)
- 12) S. Han, T. Sawada, T. Iwahori, S. Kawahito and S. Ando: Three-phase time-correlation image sensor using pinned photodiode active pixels, *IS&T/SPIE Electronic Imaging 2010*, 7536-28, San Jose (2010)
- 13) S. Ando, T. Kurihara and D. Wei: Exact algebraic method of optical flow detection via modulated integral imaging – Theoretical formulation and real-time implementation using correlation image sensor – *Proc. Int. Conf. Computer Vision Theory and Applications*, 480/487 (2009)
- 14) P. Stoica: List of references on spectral line analysis, *Signal Processing*, **31-3**, 329/340 (1993)
- 15) B.G. Quinn and E.J. Hannan: *The estimation and tracking of frequency*, Cambridge University Press (2001)
- 16) H. Sakai: Statistical analysis of Pisarenko's method for sinusoidal frequency estimation, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, **32-1**, 95/101 (1984)
- 17) V.F. Pisarenko: The retrieval of harmonics from a covariance function, *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, **33**, 347/366 (1973)
- 18) Y.T. Chan, J.M.M. Lavoie and J.B. Plant: A parameter estimation approach to estimation of frequencies of sinusoids, *IEEE Trans. Acoust. Speech., Signal Processing*, **29-2**, 214/219 (1981)
- 19) 安藤 繁: 短時間正弦波パラメータ推定の厳密直接解法, 信学技報, **107-62**, EA2007-11 (2007)
- 20) S. Ando and T. Nara: An exact direct method of sinusoidal parameter estimation derived from finite Fourier integral of differential equation, *IEEE Trans. Signal Processing*, **57-9**, 3317/3329 (2009)
- 21) M. Abe and J. O. Smith: Design criteria for simple sinusoidal parameter estimation based on quadratic interpolation of FFT magnitude peaks, 117th Convention of Audio Engineering Soc. (2004)
- 22) B.G. Quinn: Estimation of frequency, amplitude, and phase from the DFT of a time series, *IEEE Trans. Signal Processing*, **45-3**, 814/817 (1997)
- 23) M.D. Macleod: Fast nearly ML estimation of the parameters of real or complex single tones or resolved multiple tones, *IEEE Trans. Signal Processing*, **46-1**, 141/148 (1998)
- 24) S. Ando, et al.: Novel theoretical design and fabrication test of biomimicry directional microphone, *Proc. Transducers'09, 1932/1935*, Denver (2009)
- 25) 小山翔一, 栗原 徹, 安藤 繁: 波動場の小領域観測による瞬時波源定位の理論と実験的検証, 電気学会論文誌, **129-E-10**, 350/356 (2009)
- 26) 佐藤世智, 栗原 徹, 安藤 繁: 荷重積分法に基づく白色光干渉信号の直接中心決定アルゴリズム, 計測自動制御学会論文集, **46-9**, 539/546 (2010)
- 27) T. Nara and S. Ando: Direct localization of poles of meromorphic function from measurements on incomplete boundary, *Inverse Problems*, **26**, ID:015011 (2010)
- 28) 持田康弘, 安藤 繁: モアレドップラー効果: 単一フレーム奥行き方向速度分布計測への適用, 計測自動制御学会論文集, **48-5**, 265/272 (2012)

### [著者紹介]

あん どう しげる  
安 藤 繁 君 (正会員, フェロー)



1974年3月東京大学工学部計数工学科卒業。76年3月同大学院工学系研究科計数工学専攻修士課程修了。79年3月同博士課程修了。工学博士。79年4月東京大学工学部計数工学科助手, 80年4月同講師。84年4月電気通信大学電気通信学部電子情報学助教授。87年4月東京大学工学部計数工学科助教授, 96年11月同大学院工学系研究科計数工学専攻教授。2001年4月より同大学院情報理工学系研究科システム情報学専攻教授, 現在に至る。センサ, 画像・信号処理, 光・音響計測, 電子回路等の教育と研究に従事。本会学術奨励賞(1977年度), 同論文賞(1979, 87, 94, 97年度), 同著述賞(2001年度)など, 指導学生を含め受賞多数。電気学会上級会員, 日本音響学会, 応用物理学会, 応用数理学会, 日本鉄鋼協会, IEEE, OSA, ASA, SIAMなどの会員。

# 著者追記

## 荷重積分法：その後の進展と応用展開

2012年に前掲の解説記事をまとめて以降にも、筆者らは精力的に研究と開発を進め、数多くの進展があった。基本的方法論であること、厳密に成り立つ関係ゆえ理論的展開の土台となること、有限領域を前提とし時間的空間的な非定常性に容易に対応できること、差分方程式系や時変係数を有する系に一般化できること、などが背景にある。

以下の研究事例を考察の参考やヒントとして、多くの方々、方法論自体の進展や拡張や精密化、幅広い分野への応用展開を進められることを期待する。

- 1) 円周アレイからの波源定位<sup>1)</sup> — 有限距離の単一モノポール波源から到来する広帯域波動場の1次の偏微分方程式、波源拘束偏微分方程式に基づき、円周上でスカラー波動場を観測し、波源までの距離と方位を瞬時的かつ代数的に決定する。方位と距離に依存する系への初めての適用。
- 2) 空間フィルタ速度測定の厳密法<sup>2)</sup> — 空間フィルタ法は、格子通過像の全光量の時間周波数に基づく古典的な速度測定法である。複数の有限サイズ格子の透過光量の代数演算で速度が厳密に求められることを示した。
- 3) Mathieu 方程式系と自励発振型計測<sup>3)</sup> — Mathieu 方程式はパラメトリック励振を表わす微分方程式であり、正弦的に時間変化する係数をもつ。荷重積分法により、これを有限区間のフーリエ係数の代数方程式化し、自励発振型センサのパラメータ推定と励振の制御に用いた。
- 4) 磁気双極子定位の基礎方程式<sup>4)</sup> — 位置と姿勢や動作の計測に用いられる3次元空間中の磁気双極子について、荷重積分法に直結する電磁場の偏微分方程式の必要十分な構成と、それぞれの性質を示した。
- 5) 周波数領域 Prony 法<sup>5)</sup> — 観測波形が満たす差分方程式を同定し、その特性方程式の根として波形の構成要素の減衰正弦波パラメータを求めるのが Prony 法である。荷重積分法の方法論を標本系列の差分方程式に適用し、有限区間のフーリエ係数から、周波数分解しつつ減衰正弦波のパラメータを求められることを示した。
- 6) 正弦波モデル時間周波数領域<sup>6)</sup> — 上記の周波数領域 Prony 法を用い、線形または対数線形な時間周波数領域の構成法を示した。隣接したフーリエ係数のブロックごとに減衰正弦波パラメータを求め、軌跡の分布として表示する。  
緩やかに変化する正弦波は凝集して1本の軌跡をなし、広帯域の急激変化部では、反発しあう線群が構成される。
- 7) オプティカルフロー検出用時間相関カメラ<sup>7)</sup> — すべての画素に三相相関回路を搭載し、単一フレームオプティカルフロー検出に必要な強度画像と1次フーリエ係数画像を取得する。704×512という限られた画素数以外はほぼ

実用性能の達成を目指したイメージセンサ開発。

- 8) 車載の異常物体検出視覚システム<sup>8)</sup> — 人間の視覚系の凝視機能を模擬的に実現することで、車両の振動や操舵によるオプティカルフロー成分を除き、静的三次元環境によって生じるオプティカルフロー成分との違いから環境中を運動する人物や走行車両を選択的に映像化する。
- 9) 多項式/有理指数波形推定<sup>9),10)</sup> — 種々の場面で用いられるパルス波形が有理関数指数波形として共通な数学的表現を有すること、その微分方程式が時間有理係数をもつ統一的形式を有すること、およびそれらが有限フーリエ基底を用いた荷重積分法で容易に代数方程式化され、直接代数的なパラメータ推定が可能になることを示した。レーダ、ソナー、医療診断等への応用が期待される。

2024年5月 安藤 繁 記

## 参考文献

- 1) S. Ando, T. Nara, and T. Levy: Partial Differential Equation-Based Localization of a Monopole Source from a Circular Array, *J. Acoust. Soc. Am.*, **134**-4, 2799/2813 (2013)
- 2) S. Ando, T. Nara, and T. Kurihara: Spatial Filtering Velocimetry Revisited: Exact Short-Time Detecting Schemes from Arbitrarily Small-Size Reticules, *Meas. Sci. Technol.*, **25**-8, 085001 (2014)
- 3) 松尾, 奈良, 安藤: Mathieu 方程式系のパラメータ推定と自励発振型計測への応用, 計測自動制御学会論文集, **51**-11, 785/793 (2015)
- 4) Y. Higuchi, T. Nara, and S. Ando: Complete Set of Partial Differential Equations for Direct Localization of a Magnetic Dipole, *IEEE Trans. Magnetics*, **52**-5, 4000910 (2016)
- 5) S. Ando: Frequency-Domain Prony Method for Autoregressive Model Identification and Sinusoidal Parameter Estimation, *IEEE Trans. Signal Process.*, **68**-6, 3461/3470 (2020)
- 6) S. Ando: Time-Frequency Representation with Variant Array of Frequency-Domain Prony Estimators, *J. Acoust. Soc. Am.*, **150**-4, 2682/2694 (2021)
- 7) S. Ando, M. Nagase, T. Watanabe, T. Kosugi, and T. Iida: Correlation Image Sensor for Algebraic Solution of Optical Flow, *IEEE J. Electron Devices Soc.*, **9**, 170/179 (2021)
- 8) S. Ando and T. Kindo: Direct Imaging of Stabilized Optical Flow and Possible Anomalies from Moving Vehicle, *IEEE Trans. Intell. Transport. Syst.*, **23**-12, 24044/24056 (2022)
- 9) S. Ando: Exact Short-Time Identification of Rational or Polynomial Exponent Signals, *IEEE Trans. Signal Process.*, **70**, 5668/5678 (2022)
- 10) 安藤 繁: 有理指数信号: 計測パルス波形の統一モデルとその短時間厳密パラメータ推定, 計測と制御, **62**-12, 731/736 (2023)

[著者紹介(現在)]

あん どう しげる  
安 藤 繁 君 (正会員, フェロー)

(本号 p.450 参照)