36巻7号 再掲記事

センシング技術における逆問題の意義と構造

北 森 俊 行*

＊法政大学工学部　東京都小金井市梶野町 3-7-2
E-mail：kitamori@ktmr.sc.hosei.ac.jp

キーワード：センシング（sensing），因果過程（causal process），果因過程（anti-causal process），操作変数（manipulating variable），計測方程式（equation for measurement）．
JL 0007/97/3607-0459 © 1997 SICE

1．はじめに

計測とは知りたい事柄を，データを採集し分析して，知るための，一言でいえば知識獲得の工学的行為である．知りたい事柄にはさまざまな種類がある．たとえば通常の物理量のように1つの実数の値であることが多いかもしれないが，ベクトルや複素数値であることも，何かの平均値であることも，量と量との関数関係であることもある．獲得しようとする知識の種類や構造がこのようにいろいろあるから，当然その方法もいくつかの種類になるであろう．したがってその全体をとらえるのは容易でないが，その本質的部分である逆問題という観点からは論ずべき問題がはっきりしている．

計測においては計測対象からデータを採集し，そのデータを処理して，知りたかった測定量の値を求める．この計測過程全体を図に表わせば図1のようになろう．センサから得られるデータ y には測定量 x の値に関する情報が含まれているが，一般にはそれ以外の，計測対象やセンサの物理的状態，物性，またその環境からの影響など，測定量以外の影響も含まれている．そこでこの測定量以外の物理量の影響を除去して測定量の値を求めるデータ処理が必要になる．図では果因過程とかいた部分であり，逆問題とも呼ばれているが，その意義を明確にするとともに，その構造，問題点を明らかにしよう．計測は基本的には物理とのかかわり合いであるが，逆問題は物理から離れて方程式を解くという数式の扱いになる．そうすることによって，またディジタル計算機を活用するようになって計測系の規模がますます大きくなってきた．しかし計測や逆問題の本質は規模の大きさには関係しない．そこでできるだけ簡単な例で本質や方程式を解く過程を把握していきたい．本誌ではあまり式を使わないことが推奨されているが，ここでの問題はいかに方程式が解けるか，また解けないかを見なければならないので，式が多くなることを許していただきたい．

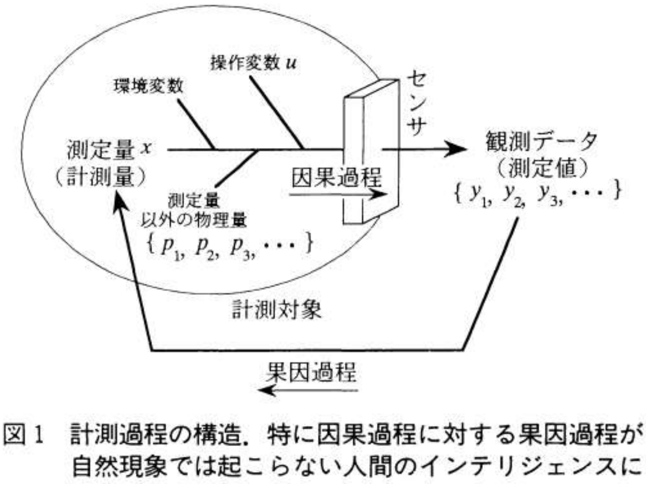

図1　計測過程の構造．特に因果過程に対する果因過程が自然現象では起こらない人間のインテリジェンスに依存する過程（図中（計測量），（測定値）はこの小論で呼び代えている用語）*)

2．逆問題の意義

ある直流電気回路の等価電圧源を計測する場合を考えてみよう．等価電圧源の構造を図2の計測対象のように考えて，その起電力を E，内部抵抗を R_s としよう．この2つの未知数 E，R_s を計測するのにつぎの方法が考えられる．既知の抵抗 R_1，R_2，および電圧計を用意し，図のように R_1 を接続して R_1 の両端に現れる電圧を測ったら V_1 であったとする．つぎに R_1 を R_2 に取り替えて同様に電圧を測ったら V_2 であったとする．そうすると，電圧計の内部抵抗が無限大であるとするならば，つぎの関係式が成り立つはずである．すなわち

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{R_1}{R_s + R_1} E & \text{(1.a)} \\ V_2 = \dfrac{R_2}{R_s + R_2} E & \text{(1.b)} \end{cases}$$

である．そこで，この連立方程式を解くと

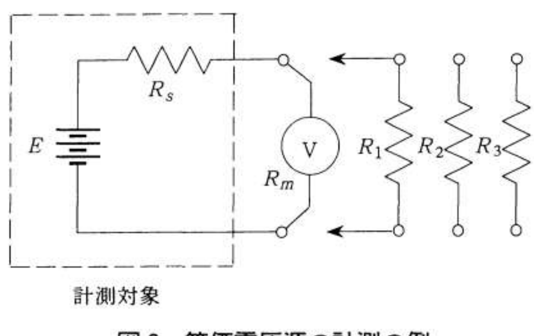

図2　等価電圧源の計測の例

$$
\begin{cases} E=\dfrac{(R_2-R_1)V_1V_2}{R_2V_1-R_1V_2} & (2.\mathrm{a}) \\ R_s=\dfrac{R_1R_2(V_2-V_1)}{R_2V_1-R_1V_2} & (2.\mathrm{b}) \end{cases}
$$

であることがわかる．

オリフィスで差圧を読んで管路内の流量を求めたり，熱電対の起電力を読んで温度差を知る場合は，流量や温度差など未知数が1つなので，連立方程式を解く必要はない．差圧から流量を，また起電力から温度差を逆算することができるし，校正曲線を用意しておいて読むこともできる．ただしそこにも“逆算”が行われることに注意しよう．校正曲線を読むことが逆算であることは先に指摘したとおりである[1]．

このような逆算は**未知数が複数存在するとき自然に連立方程式を解くことになる**．多くの場合は関心のない未知数は消去して，測定量の値だけを求めることになるが，その本質はやはり連立方程式を立ててそれを処理することである．それが逆問題である．

なぜ逆問題というか．電圧計で V_1 を読みとって(1.a)式を立てたが，この式は計測対象のなかの起電力 E や内部抵抗 R_s と，こちらが用意してつないだ既知抵抗 R_1 からなる実験系で，E と R_s と R_1 を原因として，抵抗 R_1 の両端に電圧 V_1 が現れたという結果を記述しているのである．1つのデータを読みとって1本の式を立てるということはそのデータが現れた物理現象，その因果過程を記述しているのである．データ V_2 についても同様である．連立方程式全体は一群のデータが得られる因果過程を記述していることになる．そしてそれを解くと未知数，特に測定量の値が求まるわけであるが，それは因果過程の逆，すなわちこのようなデータ V_1, V_2 が因果の結果として得られたならば，その原因 E, R_s はこうであったに違いないという推測がその連立方程式の解(2.a)，(2.b)式である．これが因果の逆をたどることなので逆問題といわれるゆえんであるが，この呼び方は弱いので，筆者はこれを“果因”過程と呼んだ[2]．結果として得られたデータからその原因である測定量 α 値を求める過程だからである．これは当然なことであるが重要である．**果因過程は因果律に逆行する，因果律に反する過程**である．したがって自然には起こらない．人間のインテリジェンス，**物理法則から解き放たれた知識処理の世界ではじめて可能になる**ことだからである．その重要性が明示的である呼び方が好ましい．

3. 用語について

計測用語はすでにJISに規定されているものも多いので，それに従うことが適切であるが，問題の構造を明確にしたり，誤解をさけるためには用語を再配置することもやむをえないかもしれない．少なくともここでは，1つのデータを読みとったとき成立する関係式とそれらを連立させて関心のないパラメータを消去し，知りたかった測定量の値を解くための連立方程式とを区別し，関連する用語も整理したほうが混乱が少ないであろう．そこで，(1.a)式や(1.b)式のように既知の値を1つ与えて，それに対するデータを読みとったとき成り立つ関係式を測定関係式，それを(1)式のように連立させた方程式を計測方程式，計測方程式を解いて求めたかった量を計測量（JISでは測定量であり，上では測定量と呼んできた)，既知の値を差し替えて使う変数を操作変数，それに対応して読みとられたデータを測定値，操作変数の1つの値に対する測定値を読むことを測定，その装置を測定系，計測方程式を解いて計測量の値を求める全体の行為を計測，その全体をシステムと考えたとき計測系あるいは計測システムと呼ぶ[2]ことにしよう[*]．

4. 操作変数の選定

いったん計測方程式が立ってしまえばその後の処理は因果律のことを考えなくてもよい数学の問題になる．そのとき零位法のように物理現象を一部に組み込んで解を求めることも考えられるが，果因過程は因果律に逆行するので，物理現象から離れたほうが自由がきく．ディジタル計算機が用いられるのはそのためでもある．以下では普通に方程式を解くことを考えよう．そのとき問題になることは計測方程式を立てたけれども，**一意の解が求まるか**ということである．線形連立方程式ならば式がすべて線形独立で，未知数の数だけの式があれば一意解が求まり，計測量の値も決まる．

このような測定関係式の数を増やすために上の例では操作変数の既知抵抗 R_1 と R_2 の2つを用意して，2つの測定値 V_1 と V_2 を読み，2本の式を作ったのであった．ここで問題になることは測定系にかかわる変数のうちで**どのパラメータを操作変数にして，どう変化させて測定値をとったら計測量の値を決定できるか**ということである．もちろん測定系のパラメータであって，物理的に操作しやすいものでなければならない．それは個々の測定系によって異なるから一般論はできないが，計測理論的には測定系の因果関係の構造から判断できることが望まれる．

上の例でもう少し考察しよう．上では電圧計の内部抵抗を無限大としたが，現実には必ずしも無限大とはかぎらないから，その値を R_m とすると，操作変数である既知抵抗 R_i をつないだときの測定値すなわち電圧計の読み V_i は

$$
V_i=\frac{R_mR_iE}{R_s(R_m+R_i)+R_mR_i} \tag{3}
$$

となる．このままでは見通しが悪いので，操作変数の影響を明示的にする式変形を行うと

$$
\frac{1}{V_i}=\frac{R_s+R_m}{R_mE}+\frac{R_s}{E}\frac{1}{R_i} \tag{4}
$$

を得る．この式を見ると操作変数 R_i (の逆数) が測定値 V_i

(の逆数)に線形なかたちの影響しかしないことがわかる．そこで操作変数 R_i の値を R_1，R_2 として電圧計の読み V_1，V_2 を読むと，この線形式の係数

$$c_0=\frac{R_s+R_m}{R_mE},\ c_1=\frac{R_s}{E} \tag{5}$$

は(4)式で $i=1$，2 とした連立方程式

$$\begin{bmatrix}1/V_1\\1/V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1/R_1\\1 & 1/R_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\c_1\end{bmatrix} \tag{6}$$

から決まってしまい，

$$\begin{cases}c_0=\dfrac{1/(R_2V_1)-1/(R_1V_2)}{1/R_2-1/R_1}\\[2ex] c_1=\dfrac{1/V_2-1/V_1}{1/R_2-1/R_1}\end{cases} \tag{7}$$

である．これで(4)式の関係は数値的に完全に決まってしまい，これ以上測定を繰り返しても（偶然誤差を平均値や最小自乗法的に低減することは別として）新しい情報は得られない．そこでこの数値的結果(7)を(4)式の係数(5)とつきあわせて E，R_s，R_m を求めたいが，未知数が3つあるのに式が2つしかないから，これら3つの未知数を解くことができない．R_i をもうひとつ R_3 にして測定値を求めても，結局 c_0，c_1 の2つしかないからだめである．

このように，**操作変数によっては未知数の数に等しいだけの独立な測定値が得られるとはかぎらない**．そこでどうするか，操作変数の選び方が，物理的に操作できるかということに加えて，方程式を解くことができるかという数学的面からも計測法の設計にかかわる重要な問題となる．

この例のように独立な測定関係式の数が十分そろわないのは測定関係式(4)が操作変数(あるいはそれのみの関数)の線形関係になって，その操作変数の値を変化させても2つの係数が決まるだけだからである．したがって別の操作変数を選ぶかつけ加えるかして，得られる独立な係数の数を増やしてやる必要がある．測定系の構造によってできることが限定されるし，一般論は困難であるが，**未知数のいくつかの値をみかけ上変化させてやる方法**が考えられる．上の例で**図3**のように等価電圧源の出力端に既知抵抗 R_s' をつないでやるとこれが内部抵抗 R_s と直列に入るから，内部抵抗が R_s+R_s' になった別の計測対象とみなすことができる．この対象に対して，前と同じことを行えば(5)式

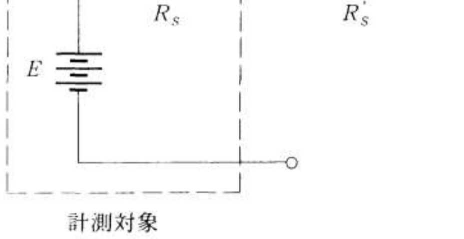

図3　内部抵抗の値の既知抵抗による操作

の代りに

$$\begin{cases}c_0'=\dfrac{R_s+R_s'+R_m}{R_mE}\\[2ex] c_1'=\dfrac{R_s+R_s'}{E}\end{cases} \tag{8}$$

そして(7)式に対応する

$$\begin{cases}c_0'=\dfrac{1/(R_2V_1')-1/(R_1V_2')}{1/R_2-1/R_1}\\[2ex] c_1'=\dfrac{1/V_2'-1/V_1'}{1/R_2-1/R_1}\end{cases} \tag{9}$$

を得る．ここで(7)，(9)式のように係数値が求まっているから(5)，(8)式から

$$\begin{cases}E=\dfrac{c_1'-c_1}{c_0c_1'-c_0'c_1}\\[2ex] R_s=\dfrac{c_1(c_1'-c_1)}{c_0c_1'-c_0'c_1}\\[2ex] R_m=\dfrac{c_1'-c_1}{c_0'-c_0}\end{cases} \tag{10}$$

を得る．ひとつ冗長なので既知抵抗 R_s' と得られた係数の間に

$$R_s'=\frac{(c_1'-c_1)^2}{c_0c_1'-c_0'c_1} \tag{11}$$

の関係があることが知れる．しかしこれは冗長だから，操作変数の値の組を3種類選び，測定回数を3回ですませられるはずである．そのためには測定関係式が3つの係数からなるように工夫をする必要がある．上の場合測定関係式は表現が少し違っているが等価的に

$$\frac{1}{V_i}=\frac{R_s+R_m}{R_mE}+\frac{1}{R_mE}R_s' +\frac{R_s}{E}\frac{1}{R_i}+\frac{1}{E}R_s'\frac{1}{R_i} \tag{12}$$

であり，操作変数 R_i と R_s' で独立に変えられる3つの項と定数項の4つの係数を決定しなければならない構造になっているのである．

測定関係式を(3)式ではなくて(4)式のかたちにしたのは操作変数 R_i をいくら変えて測定値を求めても，独立な測定値は2つしか得られないことの見通しをよくするためであったが，連立方程式を立てて解くだけなら測定関係式(3)のかたちで考えてもよい．R_s' も利用して3回の測定操作で解けるはずである．ただし解の表現式はかなり複雑になるかもしれない．冗長な変数を仲介し，**対称性のある測定操作を行うと結果も対称性がよく，見やすくなる．**

5. 非線形関係式の例

計測方程式は一般に非線形である．したがって一般論はきわめて困難である．しかし上の例では操作変数 R_i を $1/R_i$ に非線形変換し，得られた測定値 $1/V_i$ を V_i に非線形変換することによって，途中の $1/R_i$ から $1/V_i$ までは線形関係になった．いつでもこのように操作変数側と測定値側の非線形変換で途中の測定関係式が1次式になるとは期待

できない．逆に，操作変数を u_i，測定値を y_i としたとき

$$y_i = c_0 + c_1 u_i + c_2 u_i^2 \tag{13}$$

のような非線形関係式になっていれば係数の数が多いだけ，未知数の数にも対応できることになる．しかもこの係数 c_0，c_1，c_2 は操作変数 u_i を u_1，u_2，u_3 と変化させて測定値 y_1，y_2，y_3 を読みとれば，計測方程式

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

から決定できる．この方程式は，**Vandermonde の行列式が相異なる u_1，u_2，u_3 に対してゼロになることがないから，必ず解くことができる．**係数 c_0，c_1，c_2 が決定された後で，それから(10)式のように具体的な物理量である未知数を解くことは個々の問題について考えなければならない．

例として流体の粘性係数を毛管を使って計測する場合を考えると，

$$\eta = \frac{\pi a^4 P}{8Q(L+\lambda)} - \frac{m\rho Q}{8\pi(L+\lambda)} \tag{15}$$

という関係式がある[5]．ここで η：粘性係数，ρ：流体の密度，a：毛管の内半径，P：毛管両端の差圧，Q：単位時間に毛管を通過する流量，L：毛管の長さ，λ：毛管の管端補正，第 2 項は運動エネルギーに関する補正項，m：運動エネルギーに関する補正項の補正係数，π：円周率である．補正係数 m は研究者によって異なる 1 近辺の値が報告されている．差圧 P は一定になるように装置を組み立てる．管端補正 λ は異なる長さの毛管を 2 本使って求める．粘性係数 η を求めるときは単位時間の流量 Q を測定する．そこでいま η，m，λ を未知数として，長さの異なる 3 本の毛管を使って計測ができるであろうか．

毛管の長さ L が操作変数，単位時間の流量 Q が測定値になるので，Q を L の関数として(15)式を書き直そうとすると 2 次方程式を解くかたちになる．因果関係にこだわるならばそうしなければならないが，方程式を解く場面は物理から離れて数学の世界であり，**操作変数と測定値の物理的意味を捨てて，両者を交換してもかまわない．**そうすれば(15)式は容易に

$$L = \frac{\pi a^4 P}{8\eta}\frac{1}{Q} - \lambda - \frac{m\rho}{8\pi\eta}Q \tag{16}$$

あるいは LQ をまとめて測定量と考えれば

$$LQ = \frac{\pi a^4 P}{8\eta} - \lambda Q - \frac{m\rho}{8\pi\eta}Q^2 \tag{17}$$

であり，これは(13)式と同じであるから 3 回の測定操作で Q の 2 次式の係数

$$\frac{\pi a^4 P}{8\eta},\ -\lambda,\ -\frac{m\rho}{8\pi\eta} \tag{18}$$

の値が定まる．そして第 1 の係数から η，第 2 の係数から λ，そして η を使って第 3 の係数から m が求まることがわかる．

6．既知試料の利用

測定関係式が同じ測定系で未知の計測量と同時に計測量の値が既知の試料を使って測定値を求めると操作変数の数を増やさなくても未知パラメータをまとめて消去して計測量の値を求めることができる．超音波の定在波による板厚の計測を例にとって考えよう[1),4)]．図 4 のように超音波振動子を板にあて周波数を調整して定在波を作り，その関係から板の厚さ x を知る方法が提案されている．超音波の周波数を f，超音波の音速を v，定在波の腹の数を n とすると

$$f = \frac{nv}{2x} \tag{19}$$

の関係が成り立つ．周波数 f を調整して定在波が形成されたことを回路的に検出し，そのときの周波数 f を測定する．しかしこれだけでは計測量 x のほかに n も，たとえば鉄板材質中の定在波は見えないから，未知数であり，さらに伝播速度 v も材質によって違うかもしれないから未知数だと考えると，未知数は 3 つあるので，測定関係式の数がたりない．そこで周波数 f を徐々に上げていくといったん定在波が崩れるが，しばらくすると腹の数が 1 だけ多い定在波が形成される．そこでこの 2 回の測定操作から計測方程式

$$\begin{cases} f_0 = \dfrac{nv}{2x} \\ f_1 = \dfrac{(n+1)v}{2x} \end{cases} \tag{20}$$

を立てると，伝播速度 v を既知とするならば，n も x も解けて，

$$x = \frac{v}{2(f_1 - f_0)} \tag{21}$$

であることが知れる．

しかし伝播速度 v も未知数だとして，3 つの未知数に対して，もう 1 つ腹の数の多い定在波の周波数 f_2 を求めて 3 元連立の計測方程式を立てても伝播速度 v は解けない．定在波の腹の数 n の変化分 k を 0，1，2 と変える操作変数として測定関係式をかけば

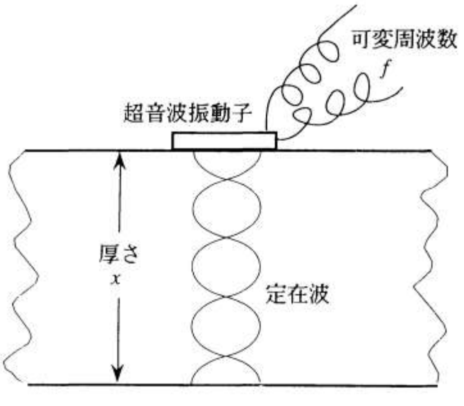

図 4　超音波の定在波による板厚計測の例

$$f_k=\frac{(n+k)v}{2x} \tag{22}$$

であり，この場合も操作変数 k に関する１次式

$$f_k=\frac{nv}{2x}+\frac{v}{2x}k \tag{23}$$

になるからである．この場合に未知数をみかけ上変化させることができなくはないかもしれないが，同じ材質で厚さ x_s が既知の試料を用意し，それについて同じ測定操作を繰り返すと，このときの最初の定在波の腹の数を n_s として，伝播速度 v は同じであるから，

$$\begin{cases} f_{s0}=\dfrac{n_s v}{2x_s} \\ f_{s1}=\dfrac{(n_s+1)v}{2x_s} \end{cases} \tag{24}$$

が成り立つ．そこで(20)，(24)式を連立させると全部求まって，

$$\begin{cases} x=\dfrac{f_{s1}-f_{s0}}{f_1-f_0}x_s \\ v=2x_s(f_{s1}-f_{s0}) \\ n=\dfrac{f_0}{f_1-f_0} \\ n_s=\dfrac{f_{s0}}{f_{s1}-f_{s0}} \end{cases} \tag{25}$$

である．実は(24)式は伝播速度を計測する方程式になっているのであるが，(20)と(24)式を連立した全体としても未知数の数（板厚既知の試料に対する n_s が１つよぶんに加わっている）と測定関係式の数が過不足なく一致している．

しかし，このような既知試料を利用することによって，たとえば（いくつもの補正係数を付加した場合のように）関係式(25)が未知パラメータ a，b，c を

$$f=\frac{abcnv}{2x} \tag{26}$$

のようにたくさん含んでも，伝播速度 v を知る必要がなくて消去するだけなら $abcv$ の因数をまとめて消去できるから，**未知数の数より少ない測定操作の回数で計測量の値を求められることがある**のである．

7. おわりに

逆問題が計測の物理的側面から解放されて連立方程式をいかに解くかという数学的問題になる反面，非線形連立方程式が一般的であるという困難があること，また操作変数を適当に選ぶことによって独立な測定関係式の数を増やすことができるが，操作変数は物理的操作可能性が問題で，数学だけでは片がつかないという難しさがあるということ，未知数がまとめて消去できれば必ずしも未知数の数だけ測定関係式がなくても計測量の値が求まるということなど，数学の問題になりながらも物理的，計測的特質がからむ基本的課題が存在することを明らかにした．各種計測問題の個別性が高い課題であるが，それでもなお一般原理があるはずであり，計測方法のよりスムーズな開発のためにはこの基本的な課題の解明に努力することが重要である．

*）はじめに断わるべきであったが，ここでは逆問題の面を考察したので，データ処理的側面だけを計測と呼んでいることに問題があるかもしれない．むしろ物理法則の拘束下でセンサを開発したりデータ採集機構を構築したりすることなど，物理にかかわる側面も重要な計測工学の課題であることを強調しておきたい．

（1997年4月18日受付）

参 考 文 献

1) 北森俊行：センシングにおける逆問題とそのインテリジェンス，システム/制御/情報，35-10，585/591（1991）
2) 北森俊行：計測の本質と計測工学，計測と制御，26-2，145/152（1987）
3) 北森俊行：計測系の構造と機能，計測と制御，19-1，27/32（1980）
4) 北森俊行：計測と観測理論，計測と制御，15-1，92/99（1976）
5) 真島，磯部（共編）：計測法概論(下)，p. 598，コロナ社（1954）

［著 者 紹 介］

北森俊行（きたもり としゆき）君（正会員）

1933年12月4日生．57年東京大学工学部応用物理学科卒業．62年同大学大学院博士課程修了（工学博士）．慶應義塾大学工学部助手，講師，助教授を経て，65年東京大学工学部助教授，79年同教授．94年法政大学工学部教授．東京大学名誉教授．制御系の設計，計測系の機能構造の研究に従事．システム制御情報学会，IEEEなどの会員．本会フェロー，94年度会長．

故北森俊行先生の多大なご業績を再確認しながら，
ご寄稿いただきました本記事を本特集「計測工学 温故知新」へ
敬意を表して再掲いたします．